

Time : Three Hours]

[Maximum Marks : 050

नोट : सभी प्रश्नों के उत्तर दीजिए। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

Note : Answer All Question. All Question carry equal marks.

इकाई/Unit-I

1. (a) सिद्ध कीजिए कि एकदिष्ट अनुक्रम अभिसारी होगा यदि और केवल यदि वह परिबद्ध है।

Prove that Monotonic sequence is convergent if and only if it is bounded.

- (b) श्रेणी के अभिसरण का परीक्षण कीजिए। $\sum_{n=1}^{\infty} [\sqrt{n^3+1} - \sqrt{n^3}]$

Check the convergent of series. $\sum_{n=1}^{\infty} [\sqrt{n^3+1} - \sqrt{n^3}]$

अथवा/OR

- (a) श्रेणी के लिए रॉबी परीक्षण को लिखिए एवं सिद्ध कीजिए।

State and prove the Raabe's test for series.

- (b) सिद्ध कीजिए कि $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^n}{n!}\right)^{\frac{1}{n}} = e$

Prove that $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^n}{n!}\right)^{\frac{1}{n}} = e$

इकाई/Unit-II

2. (a) सिद्ध कीजिए कि यदि फलन $f(x)$ और $g(x)$ बिन्दु $x = a$ पर संतत है तो फलन $f(x) - g(x)$ भी बिन्दु $x = a$ पर संतत होता है

Prove that of function $f(x)$ and $g(x)$ are continuous at $x = a$ then $f(x) - g(x)$ is also continuous at $x = a$

- (b) रोले का मध्यमान प्रमेय लिखिए एवं सिद्ध कीजिए।

State and prove Rolle's mean value theorem.

अथवा/OR

- (a) फलन $f(x) = x^2 - 2x + 3$, $g(x) = x^3 - 7x^2 + 26x - 5$ के लिए अंतराल $[-1, 1]$ पर कौशी के मध्यमान प्रमेय का सत्यापन कीजिए।

Verify Cauchy's mean value theorem for the function

$f(x) = x^2 - 2x + 3$, $g(x) = x^3 - 7x^2 + 26x - 5$ in the interval $[-1, 1]$

- (b) यदि $f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2} f''(\theta x)$ तो θ का मान ज्ञात कीजिए जबकि

$$x \rightarrow 1, f(x) = 1 + (1-x)^{5/2}$$

Find θ if $f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2} f''(\theta x)$ where

$$x \rightarrow 1, f(x) = 1 + (1-x)^{5/2}$$

इकाई/Unit-III

3. (a) समीकरण $(1-x^2) \frac{d^2y}{dx^2} - x \frac{dy}{dx} = 0$ को रूपांतरित कीजिए यदि $x = \cos \theta$

Transform the equation $(1-x^2) \frac{d^2y}{dx^2} - x \frac{dy}{dx} = 0$ is $x = \cos \theta$

- (b) फलन $f(x, y) = x^2 + xy + y^2$ का $(x-2)$ और $(y-3)$ के घातो में टेलर प्रमेय द्वारा प्रसार कीजिए।

Expand function $f(x, y) = x^2 + xy + y^2$ in power of $(x-2)$ and $(y-3)$ by Tailor theorem.

अथवा/OR

- (a) सिद्ध कीजिए कि फलन $u = x + y + z$, $v = xy + yz + zx$,
 $w = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ स्वतंत्र नहीं हैं उनके बीच एक संबंध ज्ञात कीजिए।
Prove that the functions $u = x + y + z$, $v = xy + yz + zx$,
 $w = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ are not independent. Establish a relation between them.
- (b) तीन चरों के एक समघात फलन के लिए ऑयलर प्रमेय का कथन कीजिए।
State and prove the Euler's theorem for three variable homogenous functions.

इकाई/Unit-IV

4. (a) वक्र $cy^2 = x(x + c)^2$ का अन्वलोप ज्ञात कीजिए जहाँ c प्राचल है।
Find the envelope of the curve $cy^2 = x(x + c)^2$, c being variable parameter.
- (b) अतिपरवलय $x^2 - y^2 = a^2$ केन्द्रज ज्ञात कीजिए।
Find the evolute of hyperbola $x^2 - y^2 = a^2$

अथवा/OR

- (a) निम्न फलन के उच्चिष्ठ व निम्निष्ठ मानों को ज्ञात कीजिए।
Find the maximum and minimum value for following function.
 $f(x, y) = x^3 + y^3 - 63(x + y) + 12xy$
- (b) दर्शाइये कि $128\pi m^3$ आयतन वाले एक लंब वृत्तीय बेलन का पृष्ठ (अन्तः पृष्ठों सहित) न्यूनतम होता है जब ऊँचाई 8 मी. हो।
Show that the surface area of a right circular cylinder (including the two end faces) with a volume $128\pi m^3$ is minimum when its height is 8 meters.

इकाई/Unit-V

5. (a) मूल्यांकन कीजिए।
Evaluate.

$$\int_1^e \int_0^{\log y} \int_1^{e^x} \log z \, dy \, dx \, dz$$

- (b) समाकल के समाकलन का क्रम बदलिये।
Change the order of integration in the integral

$$\int_0^{\operatorname{acos} \alpha} \int_{x \tan \alpha}^{\sqrt{a^2 - x^2}} f(x, y) \, dx \, dy$$

अथवा/OR

- (a) मूल्यांकन कीजिए।
Evaluate

$$\int_0^1 x^5 (1 - x)^2 \, dx$$

- (b) सिद्ध करो कि
Prove that

$$\left[\frac{1}{6} = 2^{-1/3} 3^{1/2} \pi^{-1/2} \left(\left[\frac{1}{3} \right]^2 \right) \right]$$